

# Question Paper Code : 3132

B.Sc. (Part-II) Examination, 2018

**MATHEMATICAL STATISTICS**

[ First Paper ]

( Statistical Inference )

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

**Note :** Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Besides this, **one** question is to be attempted from each unit.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या-1 अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न किया जाना है।

1. Attempt all parts : [2x10=20]

सभी भाग कीजिये :

(a) If  $x_1, x_2, \dots, x_n$  be i.i.d. random sample from a population whose density is

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1} & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}; \theta \geq 0$$

3132/400

( 1 )

[P.T.O.]

show that  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$  is an unbiased estimator for  $1/\theta$ .

एक समष्टि जिसका घनत्व

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{-\theta-1} & x \geq 0 \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}; \theta \geq 0 \text{ है, से}$$

यदि  $x_1, x_2, \dots, x_n$  एक i.i.d. यादृच्छिक प्रतिदर्श हो, तो दिखाइये कि  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log X_i$ ,  $1/\theta$  के लिये एक अनभिनत आकलक होता है।

- (b) Find a consistent estimator of  $\theta$ , if a random sample  $x_1, x_2, \dots, x_n$  is drawn from an uniform  $(0, \theta)$  distribution.

यदि एक समान बंटन  $(0, \theta)$  से  $x_1, x_2, \dots, x_n$  एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है तो  $\theta$  के लिये संगत आकलक ज्ञात कीजिये।

- (c) The market share Z of a company is estimated in two independent survey polls. The sample size are  $n_1 = 500$  and  $n_2 = 2000$  with corresponding shares  $p_1$  and  $p_2$  respectively. These two

निम्नलिखित सारणी में 100 कामगारों को लिंग तथा दक्षता के आधार पर बाँटित किया गया है। परीक्षण कीजिये कि दक्ष कार्य लिंग से स्वतंत्र है :

	दक्ष	अदक्ष
पुरुष	40	20
महिला	10	30

दिया है:  $\chi^2_{0.05}(1) = 3.84$

#### UNIT-IV / इकाई-IV

8. Find likelihood ratio test of  $H_0: \theta = \theta_0$  against  $H_1: \theta = \theta_1$ , based on a sample of size 1 from the density. [7]

$$f(x, \theta) = 2(\theta - x) / \theta^2, 0 < x < \theta$$

घनत्व  $f(x, \theta) = 2(\theta - x) / \theta^2, 0 < x < \theta$  से 1 आकार के एक प्रतिदर्श पर आधारित  $H_1: \theta = \theta_1$  के विरुद्ध  $H_0: \theta = \theta_0$  के परीक्षण के लिये संभावित अनुपात परीक्षण ज्ञात कीजिये।

9. A random sample of size n is drawn from  $U(0, \theta)$ . Find the shortest confidence interval for  $\theta$  for a confidence coefficient  $1 - \alpha$ . [7]

$U(0, \theta)$  से n आकार का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है।  $1 - \alpha$  विश्वसनीयता गुणांक के लिये  $\theta$  का न्यूनतम विश्वसनीयता अन्तराल ज्ञात कीजिये।

----- x -----

3132/400

( 10 )

results are to be combined. Two alternative estimators of Z are provided as :

$$Z_a = \frac{p_1 + p_2}{2} \text{ and } Z_b = \frac{p_1 + 4p_2}{5} .$$

Which one of these estimators is more efficient? Justify your answer.

एक कम्पनी का पणि अंश Z का दो स्वतंत्र सर्वेक्षण द्वारा आकलन किया जाता है।  $p_1$  एवं  $p_2$  अंश वाले दो प्रतिदर्श के आकार क्रमशः  $n_1 = 500$  और  $n_2 = 2000$  है। इन दोनों परिणामों को संयुक्त किया जाना है। Z के दो वैकल्पिक आकलक दिये जाते हैं ।

$$Z_a = \frac{p_1 + p_2}{2} \text{ और } Z_b = \frac{p_1 + 4p_2}{5}$$

इन आकलकों में कौन अधिक दक्ष है ? अपने उत्तर को न्यायसंगत सिद्ध कीजिये।

- (d) If  $X = (x_1, x_2)$  is a sample from a normally distributed population  $N(\mu, 1)$ , then the statistic  $T(X) = x_1$  is an unbiased estimator of the mean but not the sufficient statistic. How can you tell that T is insufficient for ?

3132/400

( 3 )

[P.T.O.]

यदि एक प्रसामान्य बंटित समष्टि  $N(\mu, 1)$  से  $X = (x_1, x_2)$  एक प्रतिदर्श है तब माध्य के लिये  $T(X) = x_1$  प्रतिदर्शज एक अनभिन्नत आकलक होता है परन्तु पर्याप्त प्रतिदर्शज नहीं। आप कैसे बतायेंगे कि  $T, \mu$  के लिये अपर्याप्त है।

- (e) How the method of minimum chi-square estimation differs from maximum likelihood estimation method ?

अधिकतम संभावित आकलन विधि से न्यूनतम काई-वर्ग आकलन की विधि किस प्रकार भिन्न होती है ?

- (f) A student wishes to test a null hypothesis. He calculates a probability of 0.65 but then realizes it is a two tailed test and doubles this to get a P-value as 1.300. Comment on the validity of this.

एक विद्यार्थी एक निराकरणीय परिकल्पना का परीक्षण करना चाहता है। वह 0.65 की प्रायिकता की गणना करता है परन्तु तब समझता है कि यह एक द्विपुच्छ परीक्षण है और P-मान को प्राप्त करने के लिये इसे दोगुना 1.300 कर देता है। इसकी वैधता पर टिप्पणी दीजिये।

### UNIT-III / इकाई-III

6. Write Neyman Pearson lemma for obtaining best critical region (BCR). A random sample of size n is taken from  $N(\theta, 100)$  distribution. Find BCR "C" for testing  $H_0: \theta = 75$  against  $H_1: \theta = 78$ . [8]

श्रेष्ठम क्रान्तिक क्षेत्र (BCR) प्राप्त करने के लिये नेयमैन पियरसन प्रमेयिका को लिखिये।  $N(\theta, 100)$  बंटन से n आकार का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है।  $H_1: \theta = 78$  के विरुद्ध  $H_0: \theta = 75$  के परीक्षण के लिये BCR "C" ज्ञात कीजिये।

7. (a) Explain any two applications of t-test. [4]

t-परीक्षण के कोई दो उपयोग बताइये।

- (b) The following table gives the classification of 100 workers according to sex and nature of work. Test whether nature of skilled work is independent of sex of worker : [4]

	Skilled	Unskilled
Male	40	20
Female	10	30

Given  $\chi_{0.05}^2(1) = 3.84$

प्रेक्षणों के pdf अथवा pmf पर आधारित प्राचल  $\theta$  का आकलन हम कितने सही ढंग से कर सकते हैं ? दिखाइये कि  $N(\mu, \sigma^2)$  घनत्व से  $n$  आकार का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श के लिये प्रतिदर्शज  $T = (\sum x_i) / (n+1) \mu$  के आकलन के लिये सबसे दक्ष होता है यद्यपि ये अभिनत है।

5. Let  $x$  have a pdf of the following form [7]

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find the power function of the test to the null hypothesis  $H_0 : \theta=1$  against the alternative hypothesis  $H_1 : \theta=2$  using a random sample  $x_1, x_2$  of  $n=2$  and obtain the critical region.

माना  $x$  निम्न प्रकार का एक pdf रखता है :

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{अन्य था} \end{cases}$$

$n=2$  आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श  $x_1, x_2$  का प्रयोग करते हुये विकल्प परिकल्पना  $H_1 : \theta=2$  के विरुद्ध निराकरणाय परिकल्पना  $H_0 : \theta=1$  के लिये क्षमता फलन ज्ञात कीजिये और क्रान्तिक क्षेत्र भी प्राप्त कीजिये।

(g) Is there any relation between likelihood ratio test and corresponding UMPU test for testing the hypothesis  $H_0 : \mu = \mu_0$  against the two sided alternative hypothesis  $H_1 : \mu \neq \mu_1$  ? Justify your answer.

द्वि-पुच्छ विकल्प परिकल्पना  $H_1 : \mu \neq \mu_1$  के विरुद्ध परिकल्पना  $H_0 : \mu = \mu_0$  के परीक्षण के लिये क्या संभावित अनुपात परीक्षण और समरूपी UMPU परीक्षण में कोई सम्बन्ध है ? अपने उत्तर को न्यायसंगत सिद्ध कीजिये।

(h) How will you choose critical F value from statistical tables when degrees of freedom is large ?

सांख्यिकीय तालिकाओं से क्रान्तिक F का मान आप कैसे चुनेंगे जब स्वतंत्रता की कोटि अधिक होगी ?

(i) How will you apply variance-stabilizing transformation to a fitted function ?

एक आसंजित फलन के लिये प्रसरण-स्थिरीकरण रूपांतरण को आप कैसे प्रयोग में लायेंगे ?

(j) What is the smallest sample size required to provide a 95% confidence interval for a mean, if it is important that the interval be no longer than

1c.m.? You may assume that the population is normal with variance  $9\text{ cm}^2$ .

माध्य के लिये 95% विश्वसनीयता अंतराल को उपलब्ध कराने के लिये न्यूनतम प्रतिदर्श का आकार क्या है यदि ये महत्त्व रखा जाये कि अंतराल 1 से.मी. से अधिक का न हो ? आप मान सकते हैं कि समष्टि  $9\text{ cm}^2$  के प्रसरण के साथ प्रसामान्य है।

### UNIT-I / इकाई-I

2. How the estimators are obtained by the method of moments ? Apply this method to find an estimator of the parameter  $\theta$  in the following probability function of a random variable 'x'. [8]

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{if } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

आघूर्ण विधि से आकलकों को कैसे प्राप्त किया जाता है ? एक यादृच्छिक चर 'x' के निम्नवत् प्रायिकता फलन में प्राचल  $\theta$  के लिये आकलक को प्राप्त करने के लिये इस विधि का प्रयोग कीजिये:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3} & \text{if } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

3132/400

( 6 )

3. Write the properties of method of maximum likelihood estimation. Obtain an estimator of parameter  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) using this method in the density of a random quantity whose p d f is given by : [8]

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 3 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-3}{\theta}} & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

अधिकतम संभावित आकलन विधि के गुणों को लिखिये। इस विधि का प्रयोग करते हुये प्राचल  $\theta$  ( $\theta > 0$ ) का आकलक एक यादृच्छिक मात्रा जिसका प्रायिकता घनत्व फलन दिया गया है, के लिये प्राप्त कीजिये।

$$f(x; \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 3 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-3}{\theta}} & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

### UNIT-II / इकाई-II

4. How accurately we can estimate a parameter  $\theta$  depends on pdf or pmf of the observations. Show that from a random sample of size n from  $N(\mu, \sigma^2)$  density, the statistic  $T = (\sum x_i) / (n+1)$  is the most efficient for estimating  $\mu$  though is biased. [7]

3132/400

( 7 )

[P.T.O.]