

# Question Paper Code : 3095

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2018

**MATHEMATICS**

[ First Paper ]

( Analysis )

Time : Three Hours]      Maximum Marks :  $\begin{cases} \text{B.A. : } 35 \\ \text{B.Sc. : } 75 \end{cases}$

**Note :** Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Besides this, attempt **one** question from each unit. Marks against each question are mentioned as marks for B.A./ marks for B.Sc.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या-1 अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के अंक B.A. के लिये अंक/ B.Sc. के लिये अंक के रूप में निरूपित हैं।

1. Attempt all parts : [14/30]

सभी खण्ड हल कीजिये :

3095/2000

( 1 )

[P.T.O.]

- (a) Define distance from a point to a set A and diameter of Set A in a metric space (X,d). [1/3]

दूरीक समष्टि (X,d) में किसी बिन्दु से समुच्चय A से दूरी तथा समुच्चय A के व्यास को परिभाषित कीजिए।

- (b) Show that the following alternating series is Envergent : [1/3]

दर्शाइए कि निम्न एकान्तरण श्रेणी अभिसारी है :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

- (c) Examine the convergence of the following integral: [1/3]

निम्न समाकल की अभिसारिता की जाँच कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx.$$

- (d) Define a Fourier series. Show that an even function can have no sine terms in its Fourier expansion. [1/3]

फोरियर श्रेणी को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि किसी समफलन की फोरियर श्रेणी में कोई ज्या पद नहीं होता है।

दिशा में क्रमशः समाकलित कीजिए :

$$f(z) = \frac{z+1}{4z^4 - z^2}$$

- (b) Find the bilinear transformation which maps the points  $z=0, -1, \infty$  into the points  $w=-1, -2-i, i$  respectively. [3/6]

वह द्विएकघात रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $z=0, -1, \infty$  को बिन्दुओं  $w=-1, -2-i, i$  पर क्रमशः प्रतिबिंबित करता है।

----- x -----

- (e) Find the radius of convergence of the following power series : [1/3]

निम्न घात श्रेणी की अभिसारित त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$\sum \frac{n!}{n^n} x^n$$

- (f) Find the locus of complex number  $z$  if : [1/3]

बिन्दु  $z$  का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए यदि :

$$|z+i| + |z-i| = 3.$$

- (g) Define complex line integral of  $f(z)$ . [2/3]

फलन  $f(z)$  के सम्मिश्र रेखा समाकल को परिभाषित कीजिए।

- (h) Find the poles of the following function : [2/3]

निम्न फलन के अनन्तकों को ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z-3)^2(z-1)(z+i)}$$

- (i) Find the residue of the following function at  $z=0$ . [2/3]

निम्न फलन का  $z=0$  पर अवशेष ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \frac{e^z}{z^4}$$

- (j) Define a fixed point. Find the fixed points of the transformation below : [2/3]

अपरिवर्तनीय बिन्दु को परिभाषित कीजिए। निम्न रूपान्तरण के अपरिवर्तनीय बिन्दु ज्ञात कीजिए।

$$w = \frac{2z - 5}{z + 4}$$

#### UNIT-I / इकाई-I

2. (a) Define a metric space. Let X be a metric space, prove that a subset G of X is open if and only if it is union of open spheres. [2/5]

दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए। माना X एक दूरीक समष्टि है, सिद्ध कीजिए कि X का एक उप-समुच्चय G विवृत होगा यदि और केवल यदि वह विवृत वृत्तों का सम्मिलन हो।

- (b) Define interior and exterior of a subset A of a metric space X. Prove that : [3/6]

एक दूरीक समष्टि X के किसी उप-समुच्चय A के

#### UNIT-IV / इकाई-IV

8. (a) State Taylor's theorem. Expand the following function in Taylor series for the given region : [3/6]

टेलर प्रमेय का कथन कीजिए। निम्न फलन का टेलर श्रेणी में दिए क्षेत्र में विस्तार कीजिए :

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}, |z| < 2.$$

- (b) Give a brief account of singularities of complex valued functions. [3/6]

सम्मिश्र फलनों की विलक्षणताओं का एक संक्षिप्त विवरण दीजिए।

9. (a) State Cauchy's Residue theorem. Integrate the following function along the unit circle  $|z| = 1$  and circle  $|z| = \frac{1}{4}$  in the counter clockwise sense, respectively. [3/6]

कॉशी की अवशेष प्रमेय का कथन कीजिए। निम्न फलन को इकाई वृत्त  $|z| = 1$  और वृत्त  $|z| = \frac{1}{4}$  के ऊपर वामावर्त

- (b) Show that the following function is analytic except at origin : [3/6]

दर्शाए कि निम्न फलन मूलबिन्दु की छोड़कर वैश्लेषिक है:

$$f(re^{i\theta}) = \log r + i\theta, -\pi < \theta < \pi$$

7. (a) State and prove Cauchy's Integral formula. [2/5]

कौशी के समाकल सूत्र का कथन कीजिए तथा सिद्ध कीजिए।

- (b) State Cauchy-Goursat theorem and show that:

[3/6]

कौशी-गुरसा प्रमेय का कथन कीजिए तथा दर्शाए कि :

$$\int_C \frac{z^2}{z-3} dz = 0,$$

where  $C$  is the circle  $|z|=1$ .

जहाँ  $C$  वृत्त  $|z|=1$  है।

3095/2000

( 8 )

अभ्यान्तर तथा बाह्य को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि :

$$\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) \subset \text{Int}(A \cup B).$$

3. (a) Define upper and lower Riemann integrals. Prove that every continuous function is integrable-R. [2/5]

उच्च एवं निम्न रीमान समाकलों को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

- (b) Show that the following function is integrable-R in  $[0, 1]$ : [3/6]

दर्शाए कि निम्न फलन अन्तराल  $[0, 1]$  में रीमान समाकलनीय है :

$$f(x) = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}$$

$$f(0) = 0, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

### UNIT-II / इकाई-II

4. (a) Show that : [2/5]

3095/2000

( 5 )

[P.T.O.]

दर्शाइए कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} a x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \log(1+a), \quad (a \geq 0)$$

- (b) Define uniform convergence of sequence of functions. Prove that the following sequence  $f_n(x)$  converges uniformly in the interval  $[0,1]$ :

[3/6]

फलनों के अनुक्रम की एक समान अभिसारिता को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि निम्न अनुक्रम  $f_n(x)$  अन्तराल  $[0,1]$  में एक समान अभिसारित है :

$$f_n(x) = x^{n-1}(1-x)$$

5. (a) Show that for the following function both the partial derivatives exists at  $(0,0)$  but the function is not continuous at  $(0,0)$  :

[2/5]

सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन के  $(0,0)$  पर दोनों आंशिक अवकलजों का अस्तित्व है किन्तु फलन  $(0,0)$  पर संतत नहीं है :

$$\phi(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x - y}, x \neq y$$

$$\phi(x, y) = 0, x = y$$

- (b) Prove that  $f_{xy} \neq f_{yx}$  at the origin for the following function :

[3/6]

सिद्ध कीजिए कि मूल बिन्दु पर निम्न फलन का  $f_{xy} \neq f_{yx}$  :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

$$= 0, (x, y) = 0.$$

### UNIT-III / इकाई-III

6. (a) Define harmonic function. Show that the function  $u(x, y) = e^x \cos y$  is harmonic and determine its harmonic conjugate  $v(x, y)$  and the analytic function  $f(z) = u + iv$ .

[2/5]

प्रसंवादी फलन को परिभाषित कीजिए। दर्शाइए कि फलन  $u(x, y) = e^x \cos y$  प्रसंवादी है तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी  $v(x, y)$  तथा वैश्लेषिक फलन  $f(z) = u + iv$  ज्ञात कीजिए।