Question Paper Code : 3096

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2018

MATHEMATICS

[Second Paper]

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours] **Maximum Marks :** $\begin{cases} \text{B.A.}: & 35 \\ \text{B.Sc.}: & 75 \end{cases}$

Note : Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Besides this, attempt **one** question from each unit. Marks against each question are mentioned as marks for B.A./ marks for B.Sc.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न **संख्या-1 अनिवार्य** है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से **एक** प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के अंक B.A.के लिये अंक/ B.Sc.के लिये अंक के रूप में निरूपित हैं।

1. Attempt all parts : [14/30]

सभी खण्ड हल कीजिये :

(a) let G be a group of positive real numbers under multiplication. Is the map T defined by $T(x) = x^2$ an automorphism of G ? [1/3]

माना G धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणन के सापेक्ष समूह है। क्या प्रतिचित्रण T जो कि $T(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, G की स्वकारिता है ?

(b) If in a finite group G an element has exactly two conjugates, prove that G has a normal subgroup $N \neq (e), G$. [1/3]

यदि एक परिमित समूह G में एक अव्यव के केवल दो ही संयुग्म हैं, तो सिद्ध कीजिये कि G में एक प्रासामान्य उपसमूह $N \neq (e), G$ है।

(c) Add and multiply the following polynomials over the ring $(I_4, \oplus_4, \otimes_4)$ [1/3]

$f(x) = 2 + x + 3x^2$, $g(x) = 1 + 3x + 2x^2$

निम्न बहुपदों का योग एवं गुणनफल जो वलय $(I_4, \oplus_4, \otimes_4)$ पर हैं ज्ञात कीजियेः $f(x) = 2 + x + 3x^2$, $g(x) = 1 + 3x + 2x^2$

(d) Define maximal and prime ideals of a ring and give one example of each. [1/3]

वलय की महत्तम एवं अभाज्य गुणजावलिओं को परिभाषित कीजिये और प्रत्येक का उदाहरण भी दीजिये।

(e) Prove or disprove that the set $W = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_1 a_2 = 0\}$, is a subspace of $\mathbb{R}^n$. [1/3]

निम्नलिखित कथन की सत्यता या असत्यता सिद्ध कीजियेः $W = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) \mid a_1 a_2 = 0\}$, $\mathbb{R}^n$ की एक उपसमष्टि है।

(f) Find the characteristic values of linear operator T on $\mathbb{R}^3$ defined by : [1/3]

रैखिक संकारक T के अभिलाक्षणिक मान ज्ञात कीजिये जहाँ T , $\mathbb{R}^3$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है :

(g) Define diagonalizable linear operator on a finite dimensional vector space and give an example. [2/3]

एक परिमित विमिय सदिश समष्टि का विकर्णीय रैखिक संकारक को परिभाषित कीजिये। एक उदाहरण दीजिये।

(h) State Cauchy Schwarz inequality. [2/3]

कौशी-श्वार्ज असमिका का कथन कीजिये।

(i) If α and β are vectors in an inner product space, then show that $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\alpha/\beta) + \|\beta\|^2$ [2/3]

यदि α तथा β आंतरगुणन समष्टि के सदिश हैं तो सिद्ध कीजिये कि $\|\alpha \pm \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}(\alpha/\beta) + \|\beta\|^2$

(j) If $f\ (\alpha, \beta)$ is a symmetric bilinear form and if $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$, then prove that $f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$ [2/3]

यदि $f\ (\alpha, \beta)$ एक सममित द्विएकघातीय रूप हो और यदि $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} q(\alpha + \beta) - \frac{1}{4} q(\alpha - \beta)$$

आंतर गुणन को परिभाषित कीजिये। यदि $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$ समष्टि $\mathbb{R}^2$ के सदिश है तो क्या $(\alpha, \beta) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 4 x_2 y_2$ $\mathbb{R}^2$ पर आंतर गुणन है ?

(b) State and prove Bessel's inequality for finite dimensional inner product spaces. [3/6]

परिमित विमीय आंतर गुणन समष्टि के लिय बेसल असमिका का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

----- x -----

UNIT-IV / इकाई–IV

8. (a) Apply Gram-Schmidt process to the vectors $\alpha_1 = (3,0,4)$, $\alpha_2 = (-1,0,7)$ *and* $\alpha_3 = (2,9,11)$ to obtain an orthonormal basis for $\mathbb{R}^3$ with respect to the standard inner product. [3/6]

ग्राम-श्मिट पद्धति का सदिशों $\alpha_1 = (3,0,4)$, $\alpha_2 = (-1,0,7)$ *and* $\alpha_3 = (2,9,11)$ पर प्रयोग कर के $\mathbb{R}^3$ में मानक आंतरगुणन के सापेक्ष प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिये।

(b) Define symmetric bilinear form and show that the set of all symmetric bilinear forms on a vector space V is a subspace of I (V,V,F). [3/6]

सममित द्विएकघातीय समघात को परिभाषित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि सदिश समष्टि V पर सभी सममित द्विएकघातीय समघात का समुच्चय I (V,V,F) का उपसमष्टि है।

9. (a) Define inner product. Let $\alpha = (x_1, x_2), \beta = (y_1, y_2)$ be vectors in $\mathbb{R}^2$. Is $(\alpha, \beta) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2$ an inner product on $\mathbb{R}^2$? [3/6]

UNIT-I / इकाई–I

2. (a) Let G be a group . If $a \in G$, then prove that for any x, $y \in G$

x^{-1} ax =y^{-1}ay if any only if N(a) x= N (a) y. [2/5]

माना G एक समूह है। यदि $a \in G$, तो किन्हीं x, $y \in G$ लिये सिद्ध कीजिये x^{-1} ax =y^{-1}ay यदि और केवल यदि N(a) x= N (a) y

(b) State and prove Cauchy's theorem for finite obelian groups. [3/6]

परिमित आबेली समूह के लिये कौशी प्रमेय का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

3. (a) State and prove Sylow's second theorem.[2/5]

द्वितीय सिलो प्रमेय का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

(b) Prove that G/Z (G) $\simeq$ Inn (G), where Z (G) denotes centre of the group G and Inn (G), the group of inner automorphism of G. [3/6]

सिद्ध कीजिये कि G/Z (G) $\simeq$ Inn (G) जहाँ Z (G) समूह G का केन्द्र एवं Inn (G) समूह G की आंतरिक स्वकारिताओं का समूह है।

UNIT-II / इकाई–II

4. (a) Define Euclidean ring. Prove that the ring of integers is an Euclidean ring. [2/5]

यूक्लीडियन वलय को परिभाषित कीजिये । सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकों की वलय एक यूक्लीडियन वलय होगी।

(b) State and prove Eisenstein Criterion. [3/6]

आइसनस्टाइन क्राईटिरियन का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

5. (a) Let R be an Euclidean ring. Prove that an ideal A=(a_0) is a maximal ideal if and only if a_0 is a prime element of R. [2/5]

सिद्ध कीजिये कि एक यूक्लीडियन वलय R में गुणजावली A=(a_0) उच्चिष्ठ है यदि और केवल यदि a_0, R का अभाज्य अवयव है।

(b) Prove that evry PID is a UFD. [3/6]

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक PID एक UFD होता है।

UNIT-III / इकाई–III

6. (a) Let $B=\{(1,0,-1),(1,1,1),(2,2,0)\}$ be a basis for $\mathbb{C}^3$. Find the dual basis of B. [2/5]

माना $B=\{(1,0,-1),(1,1,1),(2,2,0)\}$, $\mathbb{C}^3$ का एक आधार है। B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिये।

(b) State and prove Cayley-Hamilton theorem.[3/6]

कैली हेमिल्टन प्रमेय का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।

7. (a) Let T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a linear transformation defined by $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,2x_3-x_4)$. If B is the standard basis for $\mathbb{R}^3$ and B' is the standard basis for $\mathbb{R}^2$, What is the matrix of T relative to B, B'? [2/5]

माना कि T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ एक रैखिक रूपान्तरण है जहाँ $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,2x_3-x_4)$ यदि B समष्टि $\mathbb{R}^3$ का मानक आधार है, B' समष्टि $\mathbb{R}^2$ का मानक आधार है, तो आधार B, B' में T का आव्यूह ज्ञात कीजिये।

(b) State and prove the rank nullity theorem .[3/6]

कोटि शून्यता प्रमेय का कथन कीजिये एवं सिद्ध कीजिये।