Question Paper Code : 3096

B.A./B.Sc. (Part-III) Examination, 2017

MATHEMATICS

[Second Paper]

(Abstract Algebra)

Time : Three Hours **Maximum Marks :** $\begin{cases} B.A. : 35 \\ B.Sc.: 75 \end{cases}$

Note : Answer **five** questions in all, selecting **one** question from each unit. Question **No. 1** is **compulsory**.

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं० 1 अनिवार्य है।

1. Attempt all parts : [15/30]

सभी भाग कीजिए :

(a) Let G be a group of positive real numbers under multiplication. Is the mapping $f : G \to G$ defined by $f(x) = x^2$ an automorphism of G ?

माना G धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणान के सापेक्ष समूह है। क्या प्रतिचित्रण $f : G \to G$ जो $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, G की स्वाकारिता है ?

(b) Define normalization of an element a of a group G. Prove that $N(a) = G$ if and only if $a \in z$, where z is centre of G.

समूह G का एक अवयव a के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि $N(a) = G$, यदि और केवल यदि $a \in z$ जहाँ z, G का केन्द्र है।

(c) Show that the group of order 121 is abelian.

दर्शाइए कि कोटि 121 का समूह आबेली होगा।

(d) Add and multiply the following polynomials over the ring (I_6, t_6, x_6) :

$f(x) = 2x^o + 5x + 3x^2, g(x) = 1x^o + 4x + 2x^2$

निम्न बहुपदों का योग एवं गुणनफल जो वलय (I_6, t_6, x_6) पर है ज्ञात कीजिए :

$f(x) = 2x^o + 5x + 3x^2, g(x) = 1x^o + 4x + 2x^2$

(e) Define Linear Sum and Direct Sum of two subspaces W_1 and W_2 of a Vector Space V.

किसी सदिश समष्टि V के दो उप समष्टि W_1 तथा W_2 का रेखीय योग तथा सरल योग को परिभाषित कीजिए।

(f) Define linear transformation. Show that $T : R^2 \to R^3$ defined as $T(x, y) = (x + y, 0, 0)$ is a linear transformation.

रैखिक रूपान्तरण की परिभाषा दीजिए। दर्शाइए कि $T : R^2 \to R^3$ जो $T(x, y) = (x + y, 0, 0)$ द्वारा परिभाषित है, रैखिक रूपान्तरण होगा।

(g) Let $T : R^2 \to R^2$ defined by $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. If $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (1, -1)$, find the matrix of T with respect to the ordered basis $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

माना $T : R^2 \to R^2$ जहां $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ से परिभाषित है, यदि $\alpha_1 = (1, 2)$, $\alpha_2 = (1, -1)$ तो क्रमित आधार $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ के सापेक्ष T का आव्यूह निकालिये।

(h) Define diagonalizable linear operator on a finite dimensional vector space. Give an example.

एक परिमित विमीय सदिश समष्टि का विकर्णीय रैखिक संकारक को परिभाषित कीजिए। एक उदाहरण दें।

(i) If α and β are vectors in an inner product space, then prove that :

$$\| \alpha + \beta \|^2 + \| \alpha - \beta \|^2 = 2 \| \alpha \|^2 + 2 \| \beta \|^2$$

यदि α और β अंतर गुणान समष्टि के सदिश है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\| \alpha + \beta \|^2 + \| \alpha - \beta \|^2 = 2 \| \alpha \|^2 + 2 \| \beta \|^2$$

(j) How does the Abstract Algebra differ from the Classical Algebra ?

किस प्रकार अमूर्त बीजगणित चिर सम्मत बीज गणित से भिन्न है ?

UNIT-I / इकाई-I [5/11]

2. (a) Prove that the set of all automorphism of a group G form a group.

सिद्ध कीजिए कि समूह G की स्वाकारिताओं का समुच्चय एक समूह बनाता है।

(b) Prove that $a \to a^{-1}$, $a \in G$ is an automorphism of group G if and only if G is abelian.

सिद्ध कीजिए कि $a \to a^{-1}$, $a \in G$ समूह G की स्वाकारिता होगी, यदि और केवल यदि G आबेली होगा।

3. (a) Define centre of a group. Show that the centre Z of a group G is normal subgroup of G.

समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि समूह G का केन्द्र Z, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(b) State and prove Sylow's first theorem.

सिलो की प्रथम प्रमेय का कथन कीजिए एवं सिद्ध कीजिए।

UNIT-II / इकाई-II [5/11]

(a) If R be a commutative ring with unity whose only ideals are (O) and R itself, then prove that R is a field.

यदि R तत्समक अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है जिसकी केवल (O) एवं R ही गुणाजावलियां हैं तो सिद्ध कीजिए कि R एक क्षेत्र है।

(b) Define Euclidean ring. Prove that ring of integers is an Euclidean ring.

यूक्लीडियन वलय को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकों की वलय एक यूक्लीडियन वलय होगी।

(a) If F is a field and F [x] denotes the set of all polynomials over F, then show that F [x] is not a field. [7½]

यदि F एक क्षेत्र है और F[x] सभी बहुपदों का F पर समुच्चय प्रदर्शित करता है, तो दर्शाइए कि F[x] एक क्षेत्र नहीं है।

(b) Let $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$ be a polynomial with integer coefficient and let p be a prime number such that $p+a_n$, p/a_1, p/a_2 ...... p/a_0, p^2+a_0. Show that f(x) is irreducible over the rationals.

माना $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$ पूर्णांक गुणांकों वाला बहुपद है और माना p एक अभाज्य संख्या है कि $p+a_n$, p/a_1, p/a_2 ...... p/a_0, p^2+a_0. दर्शाइये कि f(x) परिमेय संख्याओं पर अखंडनीय है।

UNIT-III / इकाई-III [5/11]

6. (a) Show that the vectors :

$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$

$\alpha_3 = (1, 0, 0, 4)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$

form a basis of R^4

दर्शाइए कि सदिश :

$\alpha_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\alpha_2 = (0, 0, 1, 1)$

$\alpha_3 = (1, 0, 0, 4)$, $\alpha_4 = (0, 0, 0, 2)$

R^4 का आधार बनाते हैं।

(b) Let V(F) and W(F) be finite dimensional vector spaces and $T : V \to W$ be linear transformation. Prove that :

rank(T) + nullity(T) = dimV.

माना V(F) और W(F) परिमित विमीय समष्टियां हैं तथा $T : V \to W$ एक रैखिक रूपान्तरण है। सिद्ध कीजिए कि :

rank(T) + nullity(T) = dimV.

7. (a) Let $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be a basis for c^3 defined by:

$\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (2, 2, 0)$

find the dual basis of B.

माना $B = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ समष्टि c^3 का आधार है जहां $\alpha_1 = (1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (2, 2, 0)$ है। B का द्वैत आधार ज्ञात कीजिए।

(b) If T be a linear operator on R^3 defined by $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1, x_2 + x_3)$ prove that $(T^2-I)(T-3I) = 0$

यदि T, R^3 पर कोई रैखिक संकारक है जो $T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_1, x_2 + x_3)$ से परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि : $(T^2-I)(T-3I) = 0$

UNIT-IV / इकाई-IV [5/12]

8. (a) Define a bilinear form. If $f(\alpha, \beta)$ is a symmetrical bilinear form and if $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ then prove that : $4f(\alpha, \beta) = q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta)$

एक द्विएकघातीय समघात को परिभाषित कीजिए। यदि $f(\alpha, \beta)$ एक सममित द्विएकघातीय रूप हो और यदि $q(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि : $4f(\alpha, \beta) = q(\alpha + \beta) - q(\alpha - \beta)$

(b) Define a quadratic form. Show that $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ is a positive definite quadrate form. What is the associated matrix ?

एक द्विघातीय समघात को परिभाषित कीजिए। दर्शाइये कि : $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ एक द्विघाती समघात जो धनात्मक है। इससे सम्बन्धित आव्यूह क्या है ?

9. (a) Let $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ be an orthrogonal set of non-zero vectors in an inner product space V. If β is any vector in V then prove that :

$$\sum_R \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leq \|\beta\|^2$$

माना $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n\}$ आन्तरगुणान समष्टि V के अशून्य लांबिक सदिशों का एक समुच्चय है। यदि β समष्टि V का एक सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\sum_R \frac{|(\beta|\alpha_k)|^2}{\|\alpha_k\|^2} \leq \|\beta\|^2$$

(b) Apply Gram-Schmidt process of the vectors :

$\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)$, $\alpha_3 = (0, 3, 4)$ to obtain an orthonormal basis for R^3 with respect to standard inner product.

ग्राम-श्मिट पद्धति का सदिशों $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 0, -1)$, $\alpha_3 = (0, 3, 4)$ पर प्रयोग करके R^3 में मानक अंतरगुणान के सापेक्ष प्रसामान्य लांबिक आधार ज्ञात कीजिए।

----- x -----