

Question Paper Code : 3093

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2017

MATHEMATICS

[Third Paper]

(Differential Equations)

Time : Three Hours Maximum Marks : $\begin{cases} \text{B.A. : 25} \\ \text{B.Sc. : 50} \end{cases}$

Note : Answer five questions in all. Question No.1 is compulsory. Besides this, attempt one question from each unit.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं.1 अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न कीजिए।

1. Attempt all the parts : [10/20]

सभी भागों को हल कीजिये :

(a) Reduce the equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x$$

into normal form.

समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2} \sin 2x$$

को नार्मल फॉर्म में बदलिए।

(b) Find complementary function of the following :

निम्नलिखित के पूरक फलन को ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \frac{dy}{dx} - (1 - \cot x)y = e^x \sin x$$

(c) Locate regular singular points of the given differential equation :

दी गई अवकल समीकरण के नियमित विचित्र बिन्दु की स्थिति बताइये :

$$x^2(x-2)^2 y'' + 2(x-2)y' + (x+3)y = 0$$

(d) Find particular integral of the following differential equation :

निम्न अवकल समीकरण का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = e^x + \cos 2x$$

(e) Prove that :

सिद्ध करिये :

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

(f) Define orthogonality of function $f(x)$ and $g(x)$ w.r.t. weight function $p(x)$ on the interval $[a, b]$.

अन्तराल $[a, b]$ पर दो फलनों $f(x)$ एवं $g(x)$ के भार फलन $p(x)$ के सापेक्ष अभिलाक्षणिकता को परिभाषित कीजिए।

(g) Show that :

दर्शाइये कि :

$$\lim_{a, b \rightarrow \theta} {}_2F_1\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right) = \cos hx$$

(h) Find out which of the functions f and g is negative definite :

ज्ञात कीजिए कि फलनों f और g में कौन सा फलन पूर्णतः ऋणात्मक है :

$$f : 2x^2 + 3xy - y^2; \quad g : -x^2 - 4xy - 5y^2$$

- (i) Differentiate between initial value problem and boundary value problem. Also give an example of each.

प्रारम्भिक मान एवं सीमा मान समस्या के बीच अन्तर बताइये। प्रत्येक का एक उदाहरण भी दीजिए।

- (j) Find critical points of the following :

निम्न के क्रांतिक बिन्दु प्राप्त कीजिए :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - (x^3 + x^2 - 2x) = 0$$

UNIT-I / इकाई-I

2. (a) By changing the independent variable, solve the given differential equation : [4/7½]

स्वतंत्र चर को बदलते हुये, निम्न अवकल समीकरण हल कीजिए :

$$\cos x \frac{d^2y}{dx^2} + \sin x \frac{dy}{dx} - 2y \cos^3 x = 2 \cos^5 x$$

- (b) Using the method of variation of parameters, solve :

प्राचल विचरण विधि द्वारा हल कीजिए :

$$y'' + n^2y = \sec nx$$

3. (a) Solve : [4/7½]

हल कीजिए :

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (x+2) \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

- (b) If $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are two solutions of the equation $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ on $[a, b]$, then prove that they are linearly dependent on this interval iff their Wronskian is identically zero.

सिद्ध कीजिए समीकरण $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ के दो हल $y_1(x)$ तथा $y_2(x)$, अन्तराल $[a, b]$ पर आपस में रेखीकृत: आश्रित होने की दशा है केवल और केवल जब उनका रौंसकियन सर्वसमतः शून्य हो।

UNIT-II / इकाई-II

4. (a) Find the power series solution of the following :

निम्नलिखित का घात श्रेणी हल प्राप्त कीजिए: [4/7½]

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

- (b) Solve in series the Legendre's equation of order one.

लीजेन्डर समीकरण (एक घात) का श्रेणी हल प्राप्त कीजिए।

5. (a) Prove that when n is a positive integer, $J_n(x)$ is the coefficient of z^n in the expansion of $e^x(z - 1/z)/2$. [4/7½]

सिद्ध कीजिए कि $e^x(z - 1/z)/2$ के विस्तार में $J_n(x)$, z^n का गुणांक है जबकि n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

- (b) Prove that :

सिद्ध कीजिये :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0, \quad n \neq 0$$

S-463/4000

(6)

UNIT - III / इकाई - III

6. (a) Prove that the Eigen values of Sturm Liouville problem are all real. [4/7½]

सिद्ध कीजिये कि स्टर्म लियोविली समस्या के सभी अभिलाक्षणिक मान वास्तविक हैं।

- (b) Show that $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, 1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$ constitute an orthogonal set on the interval $[-\pi, \pi]$ and obtain the orthonormal set.

दर्शाइये कि $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, 1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots$, एक लांबिक समुच्चय गठित करते हैं अन्तराल $[-\pi, \pi]$ पर। तथा इसका प्रासामान्य लांबिक समुच्चय भी प्राप्त कीजिए।

7. (a) Find all the Eigen values and Eigen functions of the following boundary value problem : [4/7½]

निम्न के समस्त अभिलाक्षणिक मान एवं फलन प्राप्त कीजिये :

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

- (b) Show that functions $f_1(x)=1, f_2(x)=x$ are [P.T.O.]

S-463/4000

(7)

[P.T.O.]

orthogonal on the interval $[-1, 1]$ and determine the constants A and B so that the function $f_3(x) = 1 + Ax + Bx^2$, is orthogonal to both f_1 and f_2 on the interval.

दर्शाइये कि फलन $f_1(x)=1, f_2(x)=x$, अंतराल $[-1, 1]$ पर लांबिक हैं, तथा अचर A तथा B का मान ज्ञात कीजिये यदि $f_3(x) = 1 + Ax + Bx^2, f_1$ एवं f_2 दोनों पर लांबिक हैं।

UNIT-IV / इकाई-IV

8. (a) Show that the critical point $(0, 0)$ of the autonomous system $\frac{dx}{dt} = -x - xy^2,$

$\frac{dy}{dt} = -y - x^2y$ is asymptotically stable. $[3/7\frac{1}{2}]$

दर्शाइये कि स्वायत्त निकाय : $\frac{dx}{dt} = -x - xy^2,$

$\frac{dy}{dt} = -y - x^2y$ का क्रांतिक बिन्दु $(0, 0)$ अनन्तस्पर्शीय स्थाई है।

- (b) Find the general solution of the system :

दिये गये निकाय का सामान्य हल ज्ञात कीजिये :

S-463/4000

(8)

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x + 2y$$

9. (a) Prove that Wronskian of two solutions $x = x_1(t), y = y_1(t)$ and $x = x_2(t), y = y_2(t)$; of the system $\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y, \frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y$, is either identically zero or nowhere zero on $[a, b]$. $[3/7\frac{1}{2}]$

सिद्ध कीजिए कि निकाय : $\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)y,$

$\frac{dy}{dt} = a_2(t)x + b_2(t)y$, के दो हलों $x = x_1(t), y = y_1(t)$ तथा $x = x_2(t), y = y_2(t)$ का रौसकियन सर्वसमतः शून्य है अथवा अंतराल $[a, b]$ पर कहीं शून्य नहीं है।

- (b) Describe the phase portrait of the system :

दिये गये निकाय के फेज पोर्ट्रेट की विवेचना कीजिये :

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -y$$

---- x ----

S-463/4000

(9)