

Question Paper Code : 3090

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination, 2018

(Old Course)

MATHEMATICS

[Fourth Paper]

(Geometry & Trigonometry)

Time : Three Hours] [Maximum Marks : $\begin{cases} \text{B.A. : 25} \\ \text{B.Sc. : 50} \end{cases}$

Note : Answer **five** questions in all. Question **No. 1** is **compulsory**. Besides this, attempt **one** question from each unit.

कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न कीजिए।

1. Attempt all parts : [10/20]

सभी भाग हल कीजिए :

(a) Prove that the line $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ touches the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ if

3090/1000

(1)

[P.T.O.]

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha .$$

सिद्ध कीजिए कि रेखा $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$,

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करती है, यदि :

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \alpha .$$

- (b) Prove that the conic $c(x^2 + y^2) + 2xy\sqrt{(a-c)(b-c)} = 1$ has double contact with the conic $ax^2 + by^2 = 1$.

सिद्ध कीजिए कि शांकव $c(x^2 + y^2) + 2xy\sqrt{(a-c)(b-c)} = 1$, शांकव $ax^2 + by^2 = 1$ के साथ द्विक स्पर्शी हैं।

- (c) Find the equation of conics which are confocal to conic $x^2 + 9y^2 = 9$ and passes through a point (3, 1).

उन शांकवों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो शांकव $x^2 + 9y^2 = 9$ के संनाभि हैं तथा बिन्दु (3, 1) से होकर गुजरते हैं।

- (d) if $A(2, 3, -1)$, $B(3, 5, -3)$, $C(1, 2, 3)$, $D(3, 5, 7)$ are four points, then by projection method, prove

9. (a) If $x > 0$, then prove that :

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 - \dots \infty$$

यदि $x > 0$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 - \dots \infty$$

(b) Find the sum of the series :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots \infty$$

श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2^2} \sin 3\alpha + \dots \infty$$

----- x -----

that direction AB is perpendicular to direction CD.

यदि $A(2, 3, -1), B(3, 5, -3), C(1, 2, 3), D(3, 5, 7)$ चार बिन्दु हैं, तब प्रक्षेप विधि से सिद्ध कीजिए कि दिशा AB, दिशा CD के लम्बवत् है।

(e) Find the normal form of plane $2x - 3y + 6z = 7$ by explaining the direction cosines and length of normal.

समतल $2x - 3y + 6z = 7$ का अभिलंब रूप लिखिए तथा अभिलंब की दिक् कोज्याएं तथा लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(f) Find the equation of sphere which passes through origin and make intercepts a, b, c on the coordinate axes.

उस गोले का समीकरण लिखिए जो मूल बिन्दु से होकर गुजरता है तथा निर्देशांक अक्षों पर क्रमशः a, b, c अंतःखण्ड बनाता है।

(g) Find the equation of cone having centre at origin and passes through the curve $ax^2 + by^2 = 1; lx + my + nz = k$.

मूल बिन्दु पर शीर्ष वाले शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए

जो वक्र $ax^2 + by^2 = 1; lx + my + nz = k$ से होकर गुजरता है।

- (h) Find the equation of tangent plane on conicoid $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ at point $(1, 1, 0)$.

शांकवज $3x^2 - 5y^2 + z^2 + 2 = 0$ के बिन्दु $(1, 1, 0)$ पर स्पर्शी समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (i) Prove that : $\log_e(3i) = \log_e 3 + \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)i$

सिद्ध कीजिए : $\log_e(3i) = \log_e 3 + \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)i$

- (j) Prove that : $\sin h^{-1} x = -i \sin^{-1}(ix)$

सिद्ध कीजिए : $\sin h^{-1} x = -i \sin^{-1}(ix)$

UNIT-I / इकाई-1 [3/7]

2. (a) Show that the locus of poles with respect to the parabola $y^2 = 4ax$ of tangents of the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$ is the ellipse $4x^2 + y^2 = 4a^2$.

into its canonical form and classify it.

समीकरण $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 2 = 0$ को विहित रूप में समानीत करते हुए इसका रूप निर्धारण कीजिए।

UNIT-IV / इकाई-IV [4/8]

8. (a) If $a + ib = q^{x+iy}$, then prove that : $\frac{y}{x} = \frac{2 \tan^{-1}(b/a)}{\log_e(a^2 + b^2)}$

यदि $a + ib = q^{x+iy}$, तब सिद्ध कीजिए : $\frac{y}{x} = \frac{2 \tan^{-1}(b/a)}{\log_e(a^2 + b^2)}$

- (b) If $\cos h(u + iv) = x + iy$, the prove that :

$$\frac{x^2}{\cos h^2 u} + \frac{y^2}{\sin h^2 u} = 1 \text{ and } \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1.$$

यदि $\cos h(u + iv) = x + iy$, तब सिद्ध कीजिए :

$$\frac{x^2}{\cos h^2 u} + \frac{y^2}{\sin h^2 u} = 1 \text{ तथा } \frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = 1.$$

6. (a) Find the coordinates of pole of plane $2x + 3y - 2z = 6$ with respect to conicoid $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 6$.

शांकवज $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 = 6$ के सापेक्ष समतल $2x + 3y - 2z = 6$ का ध्रुव निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the equation of circular sections of paraboloid $13y^2 + 4z^2 = 2x$.

परवलयज $13y^2 + 4z^2 = 2x$ के वृत्तीय काट का समीकरण ज्ञात कीजिए।

7. (a) Find the generating lines of hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ which passes through a point $(-1, 0, 3)$.

अतिपरवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ की उन जनक रेखाओं के समीकरण लिखिए जो बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से होकर गुजरते हैं।

- (b) Reduce the equation : $2x^2 - 7y^2 + 2z^2 - 10yz - 8zx - 10xy + 6x + 12y - 6z + 2 = 0$

सिद्ध कीजिए कि समकोणीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ की स्पर्शियों के परवलय $y^2 = 4ax$ के सापेक्ष ध्रुवों का बिन्दुपथ दीर्घवृत्त $4x^2 + y^2 = 4a^2$ है।

- (b) Prove that the locus of middle points of chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passing through a fixed point (α, β) is $b^2x(x - \alpha) + a^2y(y - \beta) = 0$.

सिद्ध कीजिए कि नियत बिन्दु (α, β) से होकर गुजरने वाली दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की जीवाओं के मध्य-बिन्दुओं का बिन्दुपथ है : $b^2x(x - \alpha) + a^2y(y - \beta) = 0$.

3. (a) If PSQ and PHR are two focal chords of ellipse which passes through the focal points S and H, then prove that $\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$ is independent to the position of point P.

यदि PSQ तथा PHR दीर्घवृत्त की नाभियों S व H से गुजरने वाली नाभिय जीवाएं हों, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{PS}{SQ} + \frac{PH}{HR}$ बिन्दु P की स्थिति से स्वतन्त्र होगा।

(b) Trace the conic :

शांकव का अनुरेखण कीजिए :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

UNIT-II / इकाई-II [4/7]

4. (a) Origin of two systems of rectangular axes are same. If any plane cut the coordinate axes of two systems at distances a, b, c and a', b', c' from origin respectively, then prove that :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}$$

समकोणीय अक्षों वाले दो निकायों का मूलबिन्दु एक है। यदि कोई समतल इन दोनों निकायों के निर्देशांक अक्षों को मूल बिन्दु से क्रमशः a, b, c तथा a', b', c' दूरियों पर काटता है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{c'^2}$$

(b) Prove that the lines $x + 2y - 5z + 9 = 0 = 3x - y + 2z - 5$ and $2x + 3y - z - 3 = 0 = 4x - 5y + z + 3$ are coplanar or intersecting each other. Also find the point of

intersection.

सिद्ध कीजिए कि रेखाएं $x + 2y - 5z + 9 = 0 = 3x - y + 2z - 5$ तथा $2x + 3y - z - 3 = 0 = 4x - 5y + z + 3$ समतलीय हैं या परस्पर एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी प्राप्त कीजिए।

5. (a) Find the equation of sphere which passes through a circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9; 2x + 3y + 4z = 5$ and which also pass through a point (1, 2, 3).

वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9; 2x + 3y + 4z = 5$ से होकर गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2, 3) से भी गुजरता है।

(b) Find the equation of right circular cylinder having radius 2 units and axis is a line : $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 2 मात्रक तथा अक्ष एक रेखा है :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$$