

Question Paper Code : 9669

B.A./B.Sc. (Semester-I) Examination, 2018

MATHEMATICS

[First Paper]

(Differential Calculus)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 80

Note : Answer five questions in all. Question No. 1 is compulsory. Besides this, one question is to be attempted from each unit

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न कीजिए।

1. Attempt all parts : [5x4=20]

सभी भाग हल कीजिए :

(a) If a series of positive terms $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ is convergent, then prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. Show that converse is not always true.

यदि धनात्मक पदों की श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ अभिसारी है, तो

सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ । दर्शाइये कि इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

(b) Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

मान निकालिये : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

(c) State Euler's theorem on homogeneous functions of two variables and prove it.

दो चरों के समघाती फलनों के लिये ऑयलर के प्रमेय का कथन कीजिए तथा उसे सिद्ध कीजिए।

(d) Define asymptotes. Find asymptotes of the curve

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1 \text{ parallel to } x\text{-axis and } y\text{-axis.}$$

अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए। वक्र $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$ की x-अक्ष और y-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी निकालिये।

(e) Find the points of inflexion on the curve :

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$$

वक्र $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$ के लिये नति परिवर्तन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए।

UNIT-I / इकाई-1

2. (a) Define Cauchy Sequence. Prove that every cauchy sequence is bounded. [7]

कौशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

(b) Show that the sequence $\{S_n\}$, where

$$S_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} \forall n \in \mathbb{N} \text{ converges to } \frac{1}{2}. \quad [8]$$

दर्शाइये कि अनुक्रम $\{S_n\}$, जहाँ कि

$$S_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2 + 5} \forall n \in \mathbb{N} \text{ है, } \frac{1}{2} \text{ को अभिसारित करता है।}$$

3. (a) Test the convergence of following series : [7]

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

9669/5000

(3)

[P.T.O.]

$$\frac{x^2}{2\sqrt{1}} + \frac{x^3}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \dots, x > 0$$

(b) Test the convergence of following series : [8]

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$x + x^{1+\frac{1}{2}} + x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} + \dots$$

UNIT-II / इकाई-11

4. (a) Discuss the continuity of the following function at $x=a$: <http://www.lucknowstudy.com> [7]

निम्न फलन के बिन्दु $x=a$ पर संतत होने की विवेचना कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} - a & \text{for } 0 < x < a \\ = 0 & \text{for } x = a \end{cases}$$

$$= a - \frac{a^3}{x^2} \text{ for } x > a$$

(b) Discuss the differentiability of the following function : [8]

निम्न फलन के अवकलनीय होने की विवेचना कीजिए :

9669/5000

(4)

$$f(x) = x^2 \quad \text{for } x < -2$$

$$= 4 \quad \text{for } -2 \leq x \leq 2$$

$$= x^2 \quad \text{for } x > 2$$

- b (a) Prove that a function which is continuous in an interval $[a, b]$ is bounded in that interval. [7]

सिद्ध कीजिए कि फलन जो अन्तराल $[a, b]$ में संतत है, उस अन्तराल में परिबद्ध है।

- (b) Define uniform continuity. Prove that the function $f(x) = x^2$ is uniformly continuous in $0 < x < 1$. [8]

एकसमान संतत को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $0 < x < 1$ के लिये एकसमान संतत है।

UNIT-III / इकाई-III

6. (a) If $\frac{1}{y^n} + \frac{1}{y} = 2x$ show that : [7]

$$(x^2 - 1)y_{r+2} + (2r+1)xy_{r+1} + (r^2 - n^2)y_r = 0$$

यदि $\frac{1}{y^n} + \frac{1}{y} = 2x$, तो दर्शाइये कि :

$$(x^2 - 1)y_{r+2} + (2r+1)xy_{r+1} + (r^2 - n^2)y_r = 0$$

(b) If $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$

where $-1 < x < 1$ and $-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$, show that $(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}$ [8]

यदि $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$

जहाँ $-1 < x < 1$ और $-\frac{\pi}{2} < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ तो दर्शाइये कि $(n+1)a_{n+1} = na_{n-1}$

7. (a) State Cauchy's mean value theorem and verify it for the functions $f(x) = \cos x$ and $g(x) = \sin x$ defined on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. [7]

कौशी की मध्यमान प्रमेय का कथन कीजिए तथा अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में परिभाषित फलनों $f(x) = \cos x$ और $g(x) = \sin x$ के लिये उसकी सत्यता की जाँच कीजिए।

- (b) If $x^y z^z = c$ where c is a constant, then show that at $z=y=x$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log(ex))^{-1} \quad [8]$$

यदि $x^2 y^2 z^2 = c$, जहाँ c एक अचर है, तो दर्शाइये कि

$$z=y=x \text{ पर : } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -(x \log(ex))^{-1}$$

UNIT-IV / इकाई-IV

8. (a) Find the pedal equation of the curve [7]

$$r^n = a^n \cos n\theta$$

वक्र $r^n = a^n \cos n\theta$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the radius of curvature of the curve : $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$. [8]

वक्र $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ की वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

9. (a) Trace the curve $y^2(2a-x) = x^3$ [7]

वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।

- (b) Find the envelope of the following family of curve, α being the parameter :

निम्न वक्र समूह का अन्वलोप ज्ञात कीजिए जहाँ α प्राचल है :

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$$

----- x -----