

Question Paper Code : 21221/31081

B.A./B.Sc. (Semester-I) (NEP) Examination, 2021

(Major/Minor)

MATHEMATICS

[Paper : First]

(Differential Calculus)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 75

Note: Answer any five questions. Each question carries 15 marks.

किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 15 अंक का है।

1. (a) Determine the constants a and b so that f defined below is continuous everywhere : [7]
- अचरो a और b के मान निकालिए ताकि नीचे परिभाषित फलन f हर जगह सतत् हो :

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ ax^2 + b, & 1 < x < 3 \\ 5x + 2a, & x \geq 3 \end{cases}$$

- (b) Prove that if a function is differentiable at a point, it is continuous at that point. Show by an example that the converse is not true. [8]

सिद्ध कीजिए कि यदि कोई फलन किसी बिन्दु पर अवकलनीय है तो यह उस बिन्दु पर सतत् भी अवश्य होगा। उदाहरण द्वारा प्रदर्शित कीजिए कि इसका विलोम सत्य नहीं होगा।

2. (a) State and prove Rolle's theorem. [8]

रोले के प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

- (b) State and prove Bolzano's theorem. [7]

बोलजानो के प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

3. (a) State and prove Darboux's intermediate value theorem of derivatives. [8]

अवकलनीयता के लिए डर्बाक्स के मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

- (b) Find n th differential coefficient of $x^3 \ln x$. [7]

$x^3 \ln x$ का n वां अवकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

4. (a) If $y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$, then prove that : [8]

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-1)y_n = 0$$

यदि $y = \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-1)y_n = 0$$

(b) Show that : [7]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

दिखाइये कि :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

5. (a) Check the continuity for the function : [7]

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

at (0, 0).

फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए सतता की जाँच (0, 0) पर कीजिए।

(b) Check the differentiability for the function : [8]

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

at (0, 0).

फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए अवकलनीयता की जाँच (0, 0) पर कीजिए।

6. (a) Verify Euler's theorem for the function [7]

$$f(x, y, z) = axy + byz + czx$$

फलन $f(x, y, z) = axy + byz + czx$ के लिए यूलर के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

- (b) If $u = f(y - z, z - x, x - y)$, then prove that :
[8]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

7. (a) Find maximum and minimum value of the function :
[8]

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

फलन $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान निकालिए।

- (b) If $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$, then
find $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$.
[7]

यदि $x + y + z = u$, $y + z = uv$, $z = uvw$, तब

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$$
 निकालिए।

8. (a) If $z = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, then
prove that :
[7]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

यदि $z = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, तब सिद्ध

कीजिए कि $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ है।

- (b) Find all asymptotes of the curve
[8]

$$y^3 - 5xy^2 - 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 +$$

$$9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$$

$$\text{वक्र } y^3 - 5xy^2 - 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 +$$

$9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$ के सभी अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए।

9. (a) If P, P' be radii of curvature at the extremities of two conjugate diameters of an ellipse, then prove that : [7]

$$\{P^{2/3} + (P')^{2/3}\}(ab)^{2/3} = a^2 + b^2$$

यदि P, P' किसी दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यास के सिरों पर वक्रता त्रिज्याएं हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\{P^{2/3} + (P')^{2/3}\}(ab)^{2/3} = a^2 + b^2$$

- (b) Trace the curve $x = (y-1)(y-2)(y-3)$. [8]

वक्र $x = (y-1)(y-2)(y-3)$ का अनुरेखण कीजिए।

10. (a) Find envelop of the curve $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$, where the parameters a and b are connected by the relation $a^p + b^p = c^p$. [8]

वक्र $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$ का इनवेलप ज्ञात कीजिए, जहाँ पैरामीटर a और b सम्बन्ध $a^p + b^p = c^p$ द्वारा सम्बन्धित है।

- (b) Trace the curve $r = a \cos 3\theta$. [7]

वक्र $r = a \cos 3\theta$ का अनुरेखण कीजिए।

-----X-----

<https://www.lucknowstudy.com>

Whatsapp @ 9300930012

Send your old paper & get 10/-

अपने पुराने पेपर्स भेजे और 10 रुपये पायें,

Paytm or Google Pay से