

Question Paper Code : 3092

B.A./B.Sc. (Part-II) Examination, 2018

MATHEMATICS

[Second Paper]

(Mathematical Methods)

Time : Three Hours] [Maximum Marks : $\begin{cases} \text{B.A.:25} \\ \text{B.Sc.:50} \end{cases}$

Note : Answer **five** questions in all. Question **No.1** is **compulsory**. Besides this, **one** question is to be attempted from each unit.

नोट : कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रथम प्रश्न अनिवार्य है। इसके अलावा, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न किया जाना है।

1. Attempt all the parts : [10/20]

सभी भाग हल कीजिए :

(a) Show that the sequence $\left\langle \frac{\cos n}{n} \right\rangle$ is convergent.

दर्शाइए कि अनुक्रम $\left\langle \frac{\cos n}{n} \right\rangle$ अभिसारी है।

(b) Determine the boundedness of the sequence

$\left\langle \frac{2n}{n+3} \right\rangle$.

अनुक्रम $\left\langle \frac{2n}{n+3} \right\rangle$ की परिबद्धता ज्ञात कीजिए।

3092/3500

(1)

[P.T.O.]

(c) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{1}{n}$.

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2 \frac{1}{n}$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

(d) Show that series $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$ is absolutely convergent.

दर्शाए कि श्रेणी $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$ निरपेक्ष अभिसारी है।

(e) Find the Laplace transform of $\frac{\sin x}{x}$.

$\frac{\sin x}{x}$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

(f) Find the inverse Laplace transform of $\frac{s+2}{s^2+4s+5}$

$\frac{s+2}{s^2+4s+5}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

(g) Define proximity of curves.

वक्रों की समीप्यता को परिभाषित कीजिए।

(h) Distinguish between extremal and stationary function.

चरम एवं स्तब्ध फलन में प्रभेद कीजिए।

8. Solve the following differential equation :

निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $(y+z)p+(z+x)q=x+y$

(ii) $pq=xy$.

9. (a) Solve :

हल कीजिए :

$$(D^2 - 6DD' + 9D'^2)z = 12x^2 + 39xy$$

(b) Reduce the equation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

to its canonical form.

समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

को इसके विहित रूप में समानयित कीजिए।

----- x -----

दर्शाए कि फलनक $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx$ के लिए

आयलर समीकरण निम्न में समानयित होता है :

$$y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{Constant}$$

(b) Find the stationary function of

$$I[y(x)] = \int_0^4 (xy' - y'^2) dx$$

Which is determined by $y(0)=0$ and $y(4)=3$.

$$I[y(x)] = \int_0^4 (xy' - y'^2) dx \text{ का स्तब्ध फलन ज्ञात कीजिए}$$

जो $y(0)=0$ और $y(4)=3$ से निर्धारित होता है।

7. (a) Determine the extremal of the functional :

फलनक के चरम ज्ञात कीजिए :

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2 - x^2) dx$$

$$y(0)=1, y'(0)=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

(b) State and prove principle of invariance of Euler's equation.

आयलर समीकरण का निश्चरता सिद्धान्त का उल्लेख करते हुए सत्यापित कीजिए।

(i) Form a partial differential equation from the equation :

$$z = f(x^2 + y^2)$$

निम्न समीकरण से आंशिक अवकल समीकरण बनाइए :

$$z = f(x^2 + y^2)$$

(j) Solve :

हल कीजिए :

$$p + q = \sin x$$

UNIT-I / इकाई-I

[3/7]

2. (a) Show that sequence $\langle S_n \rangle$ defined by

$$S_1 = \sqrt{2}, S_{n+1} = \sqrt{2S_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

is monotonically increasing.

दर्शाए कि अनुक्रम $\langle S_n \rangle$ जो निम्न से परिभाषित है

$$S_1 = \sqrt{2}, S_{n+1} = \sqrt{2S_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

एक दिष्ट वर्धमान है।

(b) Show that sequence $\langle S_n \rangle$ is convergent, where:

दर्शाए कि अनुक्रम $\langle S_n \rangle$ अभिसारी है, जहाँ :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

3. (a) If $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ is convergent series of positive terms, then show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$ is also convergent.

यदि $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ धनात्मक पदों की अभिसारी श्रेणी है, तो दर्शाइए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$ भी अभिसारी होगी।

(b) Test the convergence of the series :

निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{x^2}{2\sqrt{1}} + \frac{x^3}{3\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4\sqrt{3}} + \dots, x > 0.$$

UNIT-II / इकाई-II [4/7]

4. (a) Find the Laplace transform of $f(x)$, where :

$f(x)$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-3x}}{x}.$$

3092/3500 (4)

(b) Find the inverse Laplace transformation of $F(s)$, where :

$F(s)$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात कीजिए, जहाँ:

$$F(s) = \log\left(1 + \frac{1}{s^2}\right).$$

5. (a) Find the Fourier series of the function $f(x)$:

फलन $f(x)$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = -1, -\pi < x < 0$$

$$= 1, 0 < x < \pi$$

(b) Using Laplace transform, solve :

लाप्लास रूपान्तरण के प्रयोग से हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2 \cos x, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

UNIT-III / इकाई-III [4/8]

6. (a) Show that for the functional

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y') dx \text{ Euler's equation reduces to :}$$

3092/3500 (5)