

Question Paper Code : 9669

B.A./B.Sc. (Semester-I) Examination, 2019

MATHEMATICS

[First Paper]

(Differential Calculus)

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 80

Note : Answer five questions in all. Question No. 1 of short answer type is compulsory. Besides this, one question is to be attempted from each unit.

कूल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। लघु उत्तरीय प्रश्न सं. 1 अनिवार्य है। इसके अतिरिक्त, प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न कीजिए।

1. Attempt all parts : [4×5=20]

सभी भाग हल कीजिए :

(a) Prove that every Cauchy sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कौशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

(b) Examine the following function for continuity at $x = 0$:

निम्न फलन की $x = 0$ पर सांतत्य की जाँच कीजिए :

$$f(x) = \frac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1}, \quad x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

(c) If curves $f(x, y) = 0$ and $\phi(x, y) = 0$ touch, then show that at the point of contact :

यदि वक्र $f(x, y) = 0$ एवं $\phi(x, y) = 0$ स्पर्श करते हैं, तो स्पर्श बिन्दु पर दर्शाइये कि :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

(d) Find the angle ϕ for parabola $\frac{a}{r} = 1 + \cos \theta$.

परवलय $\frac{a}{r} = 1 + \cos \theta$ के लिये कोण ϕ ज्ञात कीजिए।

(e) Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$r^2 - p^2 = \left(\frac{p}{r} \frac{dr}{d\theta} \right)^2$$

UNIT-I / इकाई-1

2. (a) Show that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_{n+1} = \sqrt{3S_n}$, $S_1 = 1$, $\forall n \in N$ converges to 3. [8]

दर्शाइये कि अनुक्रम $\{S_n\}$ जो निम्न से परिभाषित है $S_{n+1} = \sqrt{3S_n}$, $S_1 = 1$, $\forall n \in N$, 3 को अभिसारित करता है।

- (b) Show that the sequence $\{S_n\}$ is convergent, where : [7]

दर्शाइये कि अनुक्रम $\{S_n\}$ अभिसारी है, जहाँ :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

3. (a) Test the convergence of the series : [8]

निम्न श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{3^3}{3!}x^3 + \dots$$

- (b) Discuss the convergence of the series : [7]

निम्न श्रेणी की अभिसारिता की विवेचना कीजिए :

$$x \log x + x^2 \log 2x + x^3 \log 3x + \dots + x^n \log nx + \dots$$

UNIT-II / इकाई-II

4. (a) Examine the continuity of function $f(x)$ at $x = 0, 1, 2$: [8]

निम्न फलन के बिन्दु $x = 0, 1, 2$ पर संतत होने का परीक्षण कीजिए : <http://www.lucknowstudy.com>

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 0 \\ 5x - 4 & , 0 < x \leq 1 \\ 4x^2 - 3x & , 1 < x < 2 \\ 3x + 4 & , x \geq 2 \end{cases}$$

- (b) Show that the function

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0 \text{ is differentiable at } x = 0 \text{ and hence find } f'(0). [7]$$

दर्शाइए कि फलन $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$ पर अवकलनीय है और $f'(0)$ ज्ञात कीजिए।

5. (a) Prove that a function which is continuous in an interval $[a, b]$ is bounded in that interval. [8]

यदि फलन अंतराल $[a, b]$ में संतत है तो सिद्ध कीजिए कि वह फलन उसी अंतराल में परिबद्ध भी है।

- (b) Define uniform continuity. Show that the function $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ is uniformly continuous in $[-2, 2]$. [7]

एकसमान संतता को परिभाषित कीजिए। दिखाइए कि फलन $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, $[-2, 2]$ पर एक समान संतत है।

UNIT-III / इकाई-III

6. (a) If $y = \sin(m \sin^{-1} x)$, then show that : [8]

यदि $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ तो सिद्ध कीजिए :

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 - m^2)y_n = 0$$

- (b) If $u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, prove that : [7]

यदि $u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, सिद्ध कीजिए कि :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \tan u$$

7. (a) State the Lagrange's form of mean value theorem and verify it in interval $[0, 4]$ for function $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. [8]

लंग्राज की मध्यमान प्रमेय का कथन कीजिए और अंतराल $[0, 4]$ में फलन $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ के लिये उपरोक्त प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

- (b) If $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x)$, find

the value of θ as x tends to 1, where

$$f(x) = (1-x)^{5/2} \quad [7]$$

यदि $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(\theta x)$ तो

θ का मान ज्ञात कीजिए जब $x \rightarrow 1$, जहाँ

$$f(x) = (1-x)^{5/2} \text{ है।}$$

UNIT-IV / इकाई-IV

8. (a) Deduce the relation $\frac{r}{\rho} = \sin \phi \left(1 + \frac{d\phi}{d\theta} \right)$, where

all symbols have their usual meanings. Hence find radius of curvature for $r = a(1 + \cos\theta)$. [8]

सम्बन्ध $\frac{r}{\rho} = \sin\phi \left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right)$ को स्थापित कीजिए, जहाँ सभी चिन्ह अपना सामान्य अर्थ रखते हैं और $r = a(1 + \cos\theta)$ के लिये वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(b) Obtain the pedal equation of the curve

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \quad [7]$$

वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का पादिक समीकरण प्राप्त कीजिए।

9. (a) Find the envelope of the line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ when

$$a^n + b^n = k^n. \quad [8]$$

रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जबकि

$$a^n + b^n = k^n \text{ है।}$$

(b) Trace the curve $y^2(2a - x) = x^3$. [7]

वक्र $y^2(2a - x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिए।